

1.5 全称量词与存在量词

►1.5.1 全称量词与存在量词

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定

基础过关练

►答案见 P150

题组一 全称量词命题与存在量词命题及其真假判断

1. (多选) 下列是“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 3$ ”的表述方法的有 ()

- A. 有一个 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $x^2 > 3$ 成立
 B. 对有些 $x \in \mathbb{R}, x^2 > 3$ 成立
 C. 任选一个 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $x^2 > 3$ 成立
 D. 至少有一个 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $x^2 > 3$ 成立

2. (2021 浙江温州苍南检测) 下列命题中, 全称量词命题的个数是 ()

- ① 有些自然数是偶数;
 ② 正方形是菱形;
 ③ 能被 6 整除的数也能被 3 整除;
 ④ 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 总有 $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 下列命题中, 既是全称量词命题又是真命题的是 ()

- A. 至少有一个 $x \in \mathbb{Z}$, 使得 $x^2 < 3$ 成立
 B. 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 都有 $a^2 + b^2 \geq 2(a+b-1)$
 C. $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$
 D. 菱形的两条对角线长度相等

4. (多选) (2022 安徽合肥六中段考) 已知集合 $A = \{x | x > 2\}$, 集合 $B = \{x | x > 3\}$, 则以下命题为真命题的是 ()

- A. $\exists x \in A, x \notin B$
 B. $\exists x \in B, x \notin A$
 C. $\forall x \in A, x \in B$
 D. $\forall x \in B, x \in A$

5. (多选) (2022 吉林长春北师大附属中学月考) 下列四个命题中, 是假命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x > 5$

C. $\exists x \in \mathbb{R}, |x+1| < 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| + x \geq 0$

6. (多选) (2021 山东邹城一中月考) 下列命题是真命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbb{R}, y = (x-2)^2 - 1 \geq 1$

B. $\exists x \in \mathbb{R}, y = (x-2)^2 - 1 < 0$

C. $\exists x \in \mathbb{R}, y = (x-2)^2 - 1 = -2$

D. $\exists x_1 \neq x_2, (x_1-2)^2 - 1 = (x_2-2)^2 - 1$

7. 判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题.

- (1) 任何一个实数除以 1, 仍等于这个数;
 (2) $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 \geq 0$;
 (3) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 2$;
 (4) 矩形有一个外接圆.

题组二 全称量词命题和存在量词命题的否定及其真假判断

8. (2022 湖北武汉一中月考) 命题“ $\forall x > 1, x^2 - 1 > 0$ ”的否定是 ()

A. $\forall x > 1, x^2 - 1 \leq 0$ B. $\forall x \leq 1, x^2 - 1 \leq 0$

C. $\exists x > 1, x^2 - 1 \leq 0$ D. $\exists x \leq 1, x^2 - 1 \leq 0$

命题的否定与原命题的真假总是相对的, 即一真一假.

9. 已知命题 $p: \exists x > 0, x^2 + 2x + 2 \leq 0$, 则命题 p 的否定为 ()

- A. $\exists x \leq 0, x^2 + 2x + 2 > 0$
 B. $\exists x > 0, x^2 + 2x + 2 > 0$
 C. $\forall x > 0, x^2 + 2x + 2 > 0$
 D. $\forall x \leq 0, x^2 + 2x + 2 > 0$

10. 已知: ① $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$; ② 不存在实数 x , 使 $x^2 + 1 = 0$; ③ $\forall n \in \mathbb{R}, n^2 \geq n$; ④ 至少有一个实数 x , 使得 $x^2 + 1 = 0$. 以上命题的否定为真命题的是 ()

- A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ①④

11. (多选) (2022 浙江精诚联盟联考) 下列命题的否定为假命题的是 ()

- A. 命题“ $\forall x \in \{x | 1 < x < 3\}, x^2 - 4x + 3 > 0$ ”
 B. 命题“ $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 - ab + b^2 \geq 0$ ”
 C. 命题“ $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3$ ”
 D. 命题“ $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 < 1$ ”

12. 若命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-2} < 0$, 则 $\neg p$: _____

13. (2022 山东枣庄三中月考) 下列命题是真命题的是 _____ (填序号).

- ① 方程 $3x - 2y = 10$ 有整数解;
 ② $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 0$ 的否定为 $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0$;
 ③ $\exists n \in \mathbb{N}^*$, 使得 n 能被 11 整除;
 ④ $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 1$ 的否定是 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 1$.

题型三 全称量词命题与存在量词命题及其否定的应用

14. (2021 湖南长沙长郡中学适应性检测) 已知 $\forall x \in \{x | 1 \leq x < 3\}$, 都有 $m > x$, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $m \geq 3$ B. $m > 3$
 C. $m > 1$ D. $m \geq 1$

15. (2021 江苏扬州邗江期中) 已知命题 $p: \exists x > 0, x + t - 1 = 0$, 若 p 为真命题, 则实数 t 的取值范围是

_____ ()

- A. $\{t | t > 1\}$ B. $\{t | t < 1\}$
 C. $\{t | t \geq 1\}$ D. $\{t | t \leq 1\}$

16. (2022 广东深圳南山外国语学校月考) 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + (a-1)x + 1 < 0$, 若命题 p 是假命题, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $1 \leq a \leq 3$ B. $-1 \leq a \leq 3$
 C. $1 < a < 3$ D. $0 \leq a \leq 2$

17. (2022 福建三明一中月考) 若命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}$, 关于 x 的不等式 $ax^2 + ax + 2 \leq 0$ 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 8$ B. $a \geq 8$
 C. $0 \leq a < 8$ D. $0 \leq a \leq 8$

18. (2021 山东泰安新泰第一中学月考) 已知命题 $p: \forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, x^2 - a \geq 0$, 命题 $q: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2ax + 4 = 0$, 若命题 $\neg p$ 和命题 q 都是真命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq -2$ 或 $a = 1$ B. $a \leq -2$ 或 $1 \leq a \leq 2$
 C. $a \geq 1$ D. $a \geq 2$

19. 已知 m 是实数, 不等式 $m + x^2 - 2x + 5 > 0$ 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则 m 的取值范围是 _____.

20. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$.

(1) 若命题“ $\exists x \in B, x \notin A$ ”是假命题, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若命题“ $\forall x \in A, x \in B$ ”是假命题, 求实数 m 的取值范围.

集合运算口诀: 交集元素仔细找, 属于 A 且属于 B ; 并集元素勿遗漏, 切忌重复仅取一; 全集 U 是大范围, 去掉 U 中 A 元素, 剩余元素成补集.

易混易错练

◆答案见 P151

易错点1 忽略集合中元素的意义

1. 方程组 $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x-4y=-6 \end{cases}$ 的解构成的集合是

()

- A. $\{x=2, y=3\}$ B. $\{2, 3\}$
C. $\{(2, 3)\}$ D. $(2, 3)$

2. (2022 北京十一学校期中) 设集合 $A = \{x \in \mathbb{N}^+ | 0 \leq x < 6\}$, $B = \{x | x \leq 1\}$, 则 $\complement_{A \cup B}(A \cap B) =$ _____.

3. (2022 北京房山期中) 如果非空数集 A 满足 $0 \notin A$, 且 $\forall x \in A$, 有 $\frac{1}{x} \in A$, 那么称 A 是互倒集. 给出以下数集:

① $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + 1 = 0\}$; ② $\{x | x^2 - 6x + 1 \leq 0\}$;

③ $\left\{y \mid y = \frac{2}{x}, 1 \leq x \leq 4\right\}$. 其中是互倒集的是 _____.(填序号)

易错点2 忽略集合中元素的互异性

4. (2022 山西太原期中) 已知集合 $M = \{1, 4, 2x\}$, $N = \{1, x^2\}$, 若 $N \subseteq M$, 则实数 $x =$ ()

- A. -2 或 2 B. 0 或 2
C. -2 或 0 D. -2 或 0 或 2

5. 已知集合 $P = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $M = \{-a, a\}$. 若 $P \cup M = P$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

6. 设集合 $A = \{(x-1)^2, 7x-3, 5\}$, $B = \{25, 6x+1, 5x+9\}$, 若 $A \cap B = \{25\}$, 求 $A \cup B$.

易错点3 忽略对空集情况的讨论

7. (多选) (2022 安徽滁州期中) 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | mx - 1 = 0\}$, $B \subseteq A$, 则实数 m 的值可能为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

8. (2020 山东淄博第一中学期中) 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 + ax + a + 3 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

易错点4 忽略对端点值的取舍导致解题错误

9. 已知 A, B 是两个集合, 定义 $A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$, 若 $A = \{x | -1 < x < 4\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 则 $A - B =$ _____.

10. 已知集合 $A = \{x | x \geq 4 \text{ 或 } x < -5\}$, $B = \{x | a + 1 \leq x \leq a + 3, a \in \mathbb{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

易错点5 忽略条件与结论的区分导致充分性或者必要性的判断错误

11. 命题“ $\exists x \in \{x | -1 \leq x \leq \sqrt{2}\}, x^2 + m^2 - 3m \leq 0$ ”是真命题的一个必要不充分条件是 ()

- A. $0 \leq m \leq 3$ B. $1 \leq m \leq 2$
C. $1 \leq m \leq 3$ D. $-1 < m < 4$

12. (2021 天津实验中学月考) 一元二次方程 $ax^2 + 4x + 3 = 0$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 ()

- A. $a < 0$ B. $a > 0$
C. $a < -1$ D. $a > 1$

模糊集合中对象对集合的隶属关系不是确定的. 这一概念是美国自动控制专家 L.A. 扎德首先提出的, 它使得数学的思维和方法可以用于处理模糊性现象, 构成了模糊数学的基础.

一、补集思想在集合问题中的应用

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 6 - 2a = 0\}$, $B = \{x | x < 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

二、分类讨论思想在集合与常用逻辑用语问题中的应用

2. (多选) (2022 江苏张家港期中) 若集合 $M = \{x | (x-3)(x-a) = 0, a \in \mathbb{R}\}$, $N = \{x | (x-1)(x-4) = 0\}$, 则 ()
- A. $M \cup N = \{1, 3, 4, a\}$
- B. $M \cap N$ 可能为 $\{1\}, \{4\}$
- C. M 与 N 的子集个数相同
- D. $M \cap N = \emptyset$ 是 $M \cup N = \{1, 3, 4, a\}$ 的必要不充分条件
3. (2022 河北张家口期中) 若集合 $\{x | ax^2 + x + 2 = 0\}$ 中有且只有一个元素, 则实数 a 的取值集合为 _____.
4. (2022 河南南阳一中月考) 已知 $p: x < -3$ 或 $x > 1$, $q: x < 3m+1$ 或 $x > m+2$. 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求 m 的取值范围.

三、数形结合思想在集合与常用逻辑用语问题中的应用

5. (2021 福建仙游第一中学月考) 某校高二(一)班共有学生 50 人, 每名学生要从物理、化学、生物、历史、地理、政治这六门课程中选择三门课程进行学习. 已知选择物理、化学、生物的学生各有至少 20 人, 这三门课程都不选的有 10 人, 这三门课程都选的有 10 人, 在这三门课程中选择任意两门课程的都至少有 13 人, 在物理、化学、生物中单独选物理、化学中一门的学生都至少有 6 人, 那么同时选择物理和化学这两门课程的学生人数至多为 ()
- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

6. 设 $p: x \leq 3a$ 或 $x \geq a (a < 0)$, $q: -4 \leq x < -2$, 且 q 是 p 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为 _____.

四、转化与化归思想在集合与常用逻辑用语问题中的应用

7. (多选) (2021 浙江台州六校期中联考) 命题 “ $\forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, x^2 - a \leq 0$ ” 为真命题的充分条件可以是 ()
- A. $a \leq 4$ B. $a \geq 4$
- C. $a \leq 5$ D. $a \geq 5$
8. (2022 浙江嘉兴期中) 已知集合 $A = \{x | m-2 < x < m+1\}$, $B = \{x | 0 < x < 5\}$.
- (1) 若 $m=1$, 求 $A \cap B$;
- (2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

如果说数学知识是数学内容, 可用文字和符号来记录和描述, 那么数学思想则是数学意识, 只能领会、运用, 属于思维的范畴, 用以对数学问题的认识、处理和解决.